

Ex12. 设齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵为 $A$ , 若三阶非零方阵 $B$  满足 $AB = 0$ , 试求 $\lambda$  和 $|B|$ .

解. 如果 $|B| \neq 0$ , 则矩阵 $B$  可逆, 于是,

$$A = AE = (AB)B^{-1} = 0 \cdot B^{-1} = 0,$$

这与 $A \neq 0$  矛盾. 所以,  $|B| = 0$ .

由 $AB = 0$ ,  $B \neq 0$  知齐次线性方程组 $Ax = 0$  有非零解, 所以,  $|A| = 0$ . 又

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 4 + 6\lambda - 6 - \lambda + 4 = 5\lambda - 5.$$

由 $|A| = 0$  得 $\lambda = 1$ .